TD$_{17}$ – Équations différentielles

Exercice 1 ★

Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + \cos(x)y = 0$
2. $y' + \dfrac{1}{x\ln(x)}y = 0$
3. $y' + \cos^3(x)y = 0$
4. $(1+x^2)y' - 2xy = 0$
5. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 0.$

Exercice 2 ★

Résoudre les équations homogènes suivantes sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

1. $(1+x^2)y' + xy = 0$
2. $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$
3. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$
4. $xy' + x^2y = 0$
5. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$

Exercice 3 ★

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \qquad y'' + y' + y = t^2 + \mathrm{e}^t$$

$$(E_2) \qquad y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t + \cos(t)$$

Exercice 4 ★★

Résoudre les équations différentielles suivantes, en étudiant les éventuels raccordements :

$$(E_1) \qquad t(t-1)y' + y = t$$

$$(E_2) \qquad (\mathrm{e}^t - 1)y' + (\mathrm{e}^t + 1)y = 3 + 2\mathrm{e}^t$$

Exercice 5 ★★

Résoudre $|x|y' - y = x^2$.

Exercice 6 ★★

Soit a un réel strictement négatif. Résoudre $(E)\ :\ ty'' + 2y' - aty = 0$ en posant $z(t) = ty(t)$.

Exercice 7 ★★

Soit a et b deux nombres réels et c une fonction continue, le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante, appelée équation d'Euler :

$$t^2y'' + aty' + by = c(t) \qquad (\mathcal{E})$$

Elle ne fait pas partie des équations que le cours nous apprend à résoudre. Via un *changement de fonction inconnue* on va se ramener à une équation que l'on sait traiter

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$
2. Soit $y\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t) \end{array}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit $z\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(e^x) \end{array}$. Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer z' et z'' en fonction de y et de ses dérivées.

3. Montrer que y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(\mathcal{E})$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.
4. Résoudre l'équation d'Euler
$$t^2y'' - ty' + 5y = 0 \qquad (\mathcal{E}_1)$$

Exercice 8 ★★

On considère l'équation différentielle (E) : $xy''(x) - y'(x) + 4x^3y(x) = 0$.

1. Pour $t \in]0, +\infty[$, on pose $f(t) = y(\sqrt{t})$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par f équivalente à celle vérifiée par y.
2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ★★

On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$$

1. À l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer les solutions de l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$
2. En déduire les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 10 ★★★

Soit (E) : $(1-t^2)y'' - ty' + y = 0$.

1. Résoudre (E) sur l'intervalle $]-1, 1[$ (on pourra poser $t = \cos(u)$).
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $]1, +\infty[$ (faire un changement de variable bien choisi comme en 1.)
3. À l'aide du résultat de la question 2., résoudre (E) sur l'intervalle $]-\infty, -1[$.
4. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
5. Retrouver les résultats précédents par une autre méthode.

Exercice 11 ★★

On considère l'équation différentielle
$$(E) : \qquad t^2y''(t) + 4ty'(t) + (2-t^2)y(t) = 1 \qquad \text{sur }]0, +\infty[$$
Résoudre (E) en posant $z : t \mapsto t^2y(t)$

Exercice 12 ★★

On considère l'équation différentielle
$$(E) : \qquad (1+x)y'' - y' - xy = 0 \qquad \text{sur }]-1, +\infty[$$

1. Déterminer une solution de (E) de la forme $x \mapsto \exp(\alpha x)$
2. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 13 ★★★

On considère l'équation différentielle
$$(E) : \qquad (1+x^2)y'' + 4xy' + \frac{1+2x^2}{1+x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. h est elle solution de (E) ?
2. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 14 ★★

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x'=x+y \\ y'=x-y \end{array}\right. \qquad (S')\left\{\begin{array}{l} x'=x-y \\ y'=2y \end{array}\right.$$

Exercice 15 ★★★

À l'aide d'un système différentiel linéaire, résoudre l'équation linéaire d'ordre 3 :

$$y^{(3)}-3y''-y'+3y=0.$$

.

Exercice 16 ★★

Soit $n \geqslant 1$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$ on pose $f(P)=(X+1)P'+P$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. À l'aide de sa matrice dans la base canonique, justifier que f est diagonalisable.
3. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 17 ★★

Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ qui s'annulent en 0.

1. Montrer que E est un espace vectoriel
2. Soit $f \in E$, montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.
3. Pour $f \in E$ et $x \geqslant 0$ on pose $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $T(f)$ est bien définie et que $T(f) \in E$.
4. Montrer que T est un endomorphisme de E.
5. Étudier les éléments propres de T.

Exercice 18 ★★★

On considère l'équation différentielle

$$(E): \qquad xy''+2y'+xy=0$$

1. Montrer que (E) admet une solution développable en série entière et préciser son rayon de convergence.
2. Reconnaître cette solution puis résoudre (E).

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2008*)

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + -f(-x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

On pourra introduire les fonctions $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$ et $h : x \mapsto f(x) + f(-x)$

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2011*)

Résoudre à l'aide de séries entières, l'équation différentielle $xy'' + (x-2)y' - 2y = x + 2$

Exercice 21 ★★★

(*Oral 2012*)

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle $u'' - u = 0$
2. Effectuer le changement de fonction $y : x \mapsto \dfrac{z(x)}{x^2}$ dans (E)
3. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.
4. En déduire toutes les solutions. Quelles sont les solutions ayant une limite finie à droite en 0 ?

Exercice 22 ★★

(*Oral 2019*)

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 7x - y \\ y' = x + 5y \end{cases}$